

## **К расчету сжатого стержня с учетом реальных условий его взаимодействия со смежными элементами каркаса.**

В расчетной модели каркаса узловому соединению стержней обычно соответствует наложение кинематических связей, обеспечивающих совместность линейных и угловых перемещений торцевым плоскостям соединяемых стержней. Известно, что анализ напряженного состояния реальной структурной конструкции может быть выполнен с достаточной точностью по шарнирно-стержневой модели без учета угловых перемещений в узлах. Однако игнорирование их совместности приводит к чрезмерному занижению несущей способности сжатых стержней, определяемой по действующим нормам.

На первый взгляд, жесткость узловых сопряжений «Меро», «Кисловодск» и т.п., действительно, кажется незначительной, недостаточно определенной. Пренебрежение ею в СНиП II-23-85 и СП 53-102-2004 можно объяснить также неразвитостью методики и техники расчетов, но уже в начале 80-х были получены экспериментальные данные, свидетельствующие о необходимости детальных исследований в данном направлении.

Как часто бывает, начало было положено в связи с решением совершенно иной прикладной задачи. Институт МГСПИ МЭП, один из немногих пионеров освоения структур в СССР, поставил задачу - создать средство измерения усилий в стержнях. В основу методики измерений была положена зависимость частоты поперечных колебаний стержня от продольного усилия, но уже в первых экспериментах проявилось весьма существенное влияние жесткости сопряжения стержней в узлах. В результате был создан прибор, способный измерить и усилие, и степень защемленности стержня в узлах структуры ([А.С. № 1236362](#) 1984г.).

После обсуждения в ЦНИИСКе результатов измерений ([Протокол 86](#)) главным институтом ЦНИИЛМК была разработана и выполнена обширная программа теоретических и экспериментальных исследований по уточнению расчетов несущей способности сжатого стержня в структурном каркасе ([Программа 86](#)). Получены существенные результаты. Во-первых, было обосновано использование в типовых проектах ЦНИИЛМК значений  $\mu < 1$  ([Протокол 87](#)), что дало существенный экономический эффект немедленно. Во-вторых, было установлено, что несущая способность сжатого стержня системы «Кисловодск» зависит не только от жесткости, но и от прочности на изгиб стыка стержня с коннектором. Таким образом, аналитическая работа А.Я. Дривинга, исполнителя темы со стороны ЦНИИСК, позволила наметить важнейшее направление конструктивно-технологического развития структурных конструкций на многие годы вперед.

Некоторые результаты такого развития отражены в изобретении по [Патенту № 2004732](#) 1992г, но наиболее важные вопросы были решены значительно позже. Главный из них

- возможность предварительной затяжки резьбового соединения до уровня, когда оно может считаться «высокопрочным» по п. 3.7 СНиП II-23-81. Как и другие важные вопросы, он решен в полезной модели по [Патенту № 61311](#) 2006г. С этих пор резко возрастает актуальность учета в рабочем проектировании фактической изгибной жесткости сопряжений. Кстати, за минувшие годы неизмеримо выросли и возможности реализации подобных проектных задач.

Работа в намеченном направлении возобновилась в 2006г. В основу был положен принцип непосредственного вычисления параметров защемления стержня подобно тому, как это рекомендовано в Приложении «О» СП. Вскоре стало ясно, что задача не может быть

корректно поставлена и решена в рамках традиционной плоскостной модели продольного изгиба стержня. К концу 2008г разработана [Программа 2009](#) исследования неплоскостного продольного изгиба стержня структуры и к середине 2009г выполнены основные ее пункты ([Статья](#)).

*Важная часть этой работы выполнена В.А. Еремеевым, профессором мехмата ЮФУ. Все, что связано с программированием, сделано В.Ф. Соколовой. Изложение ведется от имени этого коллектива.*

До сих пор нам не удалось отыскать иных решений задачи о неплоском продольном изгибе стержня с упругоподатливыми закреплениями по концам. Правда, монография / 1 / содержит изложение результатов, полученных А.Вардани и Е.А Бейлиным для некоторых частных случаев закрепления концов сжатого стержня, приводящих к пространственной форме потери устойчивости. В рассмотренных здесь схемах закрепления используются цилиндрические шарниры, одинаково ориентированные по концам стержня. Возможность обобщения полученных результатов авторы / 1 / видят лишь в анализе схемы с цилиндрическими шарнирами, по-разному ориентированными на концах стержня.

Авторы / 2 / предлагают, вообще, отказаться от нормативной процедуры расчета на устойчивость по п.8.1.3 СП, заменив ее деформационным расчетом на прочность конструкции со случайными начальным несовершенствами. Публикация / 2 / вызывает слишком много вопросов и, по-видимому, все это непригодно при гибкости стержней более 60. С другой стороны, мы вполне согласны с авторами / 2 / в том, что «расчет на устойчивость» по п.8.1.3 СП не имеет отношения к самому явлению потери устойчивости.

При этом мы стремимся выявить и узаконить те преимущества, которые можно получить от уточнения расчетов по нормам.

По существу,  $\phi$  можно рассматривать, как особый «коэффициент условий работы сжатого стержня», определяемый по установленным в нормах правилам. Влияние элементов каркаса, сопряженных с концами стержня, выражается по этим правилам коэффициентом  $\mu$ . Важно, что в отношении структурных каркасов вполне корректны все допущения, относящиеся к процедуре определения  $\mu$  и  $\phi$ . В частности:

- погрешности центрирования осей стержней в узле и погиби не превышают 0.001 длины - *исследуемые стержни могут быть отнесены к центрально сжатым;*
- согласно п.5.2.6 СП, исследуемые сжатые стержни относятся к «...1-ому классу НДС ( $\sigma \leq R_y$ ), (упругая работа сечения);»
- согласно п.5.2.5 СП, структуры - это системы «... закрепленные от перекоса...; расчет таких конструкций может быть выполнен путем расчета отдельных элементов с учетом их взаимодействия между собой ...», т.е., с учетом совместности перемещений в узлах.

По-видимому, в [статье](#) впервые использованы понятия:

- «функция защемления»  $K(\psi)$ ;
- «главная плоскости защемления», в которой  $K(\psi)$  имеет минимальное значение, наклонена к координатной плоскости под углом  $\psi$ ;
- «показатель ортотропности защемления» или «ортотропность защемления»  $n = K_{\max}/K_{\min}$ ;
- «разнонаправленность защемлений»  $\delta = |\psi_1 - \psi_2|$  - модуль угла между плоскостями главных защемлений по концам 1 и 2 стержня.

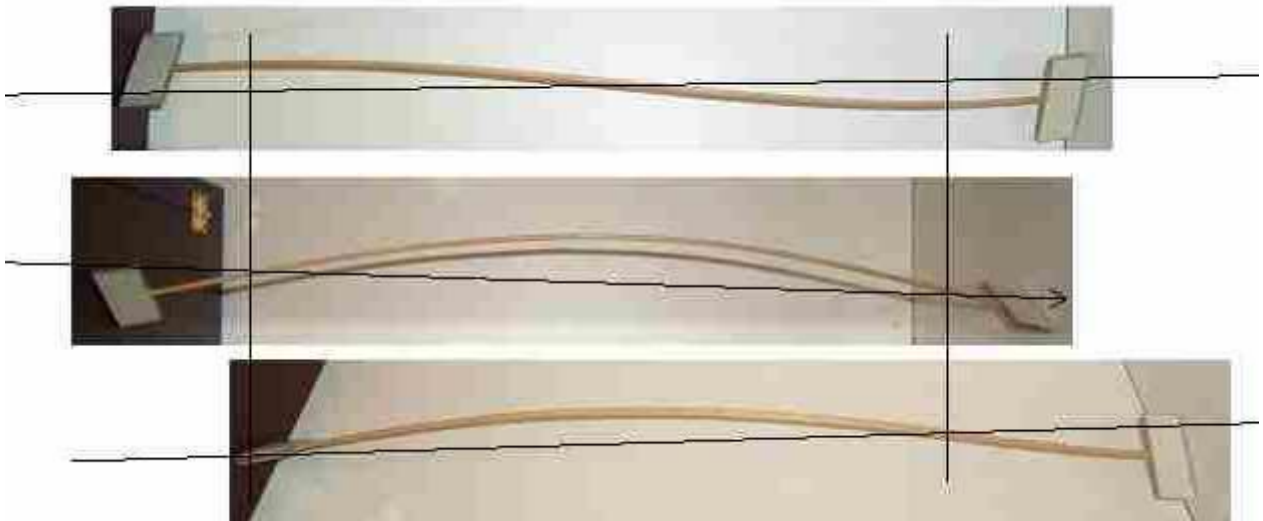
Стержень кольцевого сечения или иного с радиусом инерции  $i(\psi) = \text{const}$  имеет плоскую форму продольного изгиба только в тех случаях, когда  $\delta = 0$  или/и, по меньшей мере, одно из  $n$  равно единице.

Результаты исследования, изложенные в [статье](#) вполне достаточны для проверки несущей способности сжатого стержня в рабочем проектировании структурных конструкций, хотя в статье вопрос о физическом смысле коэффициента расчетной длины, определяемого как

$\mu = (N_{\text{э}}/N_{\text{кр}})^{0.5}$ , только обозначен. В действительности этот вопрос можно считать решенным, но он не был в статье достаточно освещен из-за ограничений объема публикации.

На стадии разработки [Программы 2009](#) был проведен кухонный (в полном смысле) эксперимент, иллюстрирующий пространственную форму потери устойчивости стержня кругового сечения с двумя цилиндрическими шарнирами по концам с разнонаправленностью около  $80^\circ$ .

На приведенных фото видна форма потери устойчивости в трех проекциях, на которых с помощью элементарной графической обработки выделены границы полуволны синусоиды. Продольное смещение проекций позволяет убедиться, что длина полуволны на всех проекциях приблизительно одинакова. Несмотря на явно качественный характер результатов, эксперимент дает основания предположить, что для стержней с сечением типа кольца или круга ( $i(\psi) = \text{const}$ ) физический смысл коэффициента  $\mu$  не меняется при переходе от плоской формы продольного изгиба к пространственной. В последнем случае он должен быть отнесен к проекции изогнутой оси стержня на произвольно выбранную плоскость, проходящую через продольную координатную ось  $z$ .



Это предположение подтверждается более строго с помощью решения В.А. Еремеева, приведенного в [статье](#). Если взять вторые производные от выражений для прогибов по  $x$ ,  $y$  и приравнять их нулю, то получим уравнения:

$$A_x/B_x + \text{tg}v\zeta = 0; \quad A_y/B_y + \text{tg}v\zeta = 0,$$

где  $v = v_{\text{кр}}$ ;  $\zeta = z/l$ ;  $A$ ,  $B$  – постоянные интегрирования.

Корни этих уравнений определяют положение точек перегиба  $\zeta_i$  на проекциях изогнутой оси  $x(\zeta)$  и  $y(\zeta)$ . Ясно, что они расположены на проекциях в различных сечениях, но расстояние между ними зависит только от  $\nu_{кр}$  и на любых проекциях одинаково:  $|\zeta_n - \zeta_{n-1}| = \mu$ .

Ниже охарактеризованы очередные задачи, возникающие в связи с развитием и практическим использованием полученных решений.

1. В [статье](#) отмечено, что прямое использование полученных результатов требует осторожности при гибкости стержня менее 120. Такую гибкость имеет 20-30% стержней в типовой конструкции «Кисловодск» и эффект повышения несущей способности стержня здесь менее ощутим, но и его нельзя считать недостойным внимания. Таким образом, на сегодня наиболее актуальны следующие задачи:

1.А. *Наметить расчетные характеристики конструкции, позволяющие более или менее адекватно и без больших осложнений учесть податливость сопряжения элементов структуры между собой в расчете сжатого стержня.*

Возможно, наиболее простое ее решение состоит в том, чтобы влияние податливости сопряжения учитывать соответствующим поправочным коэффициентом  $C_\omega$  к погонной жесткости стержня  $\Gamma$ . Значение такого коэффициента зависит, как минимум, от исходного значения  $\Gamma$ , а также от знака и модуля усилия  $N$ . При этом расчетное значение погонной жесткости  $\Gamma_p = C_\omega(\Gamma, N) \times \Gamma$  должно быть использовано вместо  $\Gamma$  в любом из вариантов определения  $N_{кр}$ . без каких-либо изменений их записи в [статье](#).

На первых порах могут быть использованы самые приблизительные оценки  $C_\omega$ , не противоречащие требованию безопасности, т.е. заведомо заниженные.

1.Б. *Установить совокупность характеристик, позволяющих достаточно адекватно учесть влияние податливостей  $\Omega$ ; по возможности уточнить численные значения этих характеристик.*

По-видимому, здесь основное содержание исследований касается определения фактических значений податливости сопряжений  $\Omega$  в конструкции, что предполагает **обязательное использование и решающую роль экспериментальных методов исследования.**

Возможно, в качестве первого шага решения данной задачи, следует ввести различные методики учета  $\Omega$  при вычислении «К» и « $\mu$ ». Полезным может оказаться и разделение влияющих  $j$ -стержней на сжатые и растянутые.

2. Иные задачи связаны с расчетом пространственных конструкций, не относящихся к структурным. В частности:

2.А. *Построить алгоритмы и соответствующие подпрограммы «К» и « $\mu$ » для каркасов, включающих центрально-сжатые стержни с сечениями типа  $i(\psi) \neq const$ .*

Решение этой задачи может быть получено, в принципе, теми же приемами, что и в [статье](#) с некоторыми осложнениями.

В общем случае  $i(\psi)$  имеет форму эллипса. Соответственно, момент инерции сечения  $I(\psi)$  и погонная жесткость стержня  $r(\psi)$  пропорциональны значению

$$i^2(\psi) = (\mathbf{n}\mathbf{i})^2 / (\mathbf{n}^2 \cos^2\psi + \sin^2\psi),$$

где:  $\mathbf{i}$  - минимальное главное значение радиуса инерции;

$\mathbf{n}\mathbf{i}$  - максимальное главное значение радиуса инерции;

$\psi$  - угловая координата, отсчитываемая от минимального радиус-вектора  $\mathbf{i}$ .

Ясно, что в расчетной модели каркаса для каждого стержня должны быть заданы  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{n}$ , а также направление свободного радиус-вектора  $\mathbf{i}$  в системе координат модели, например, его направляющими косинусами. Для вычисления параметров «К» необходимо установить аналитическое соотношение между текущим положением  $\psi_k$  вектора  $\mathbf{t}$  и его положением относительно радиус-вектора  $\mathbf{i}$  каждого влияющего стержня.

Несколько изменится сам перечень характеристик «К»: в их состав должны быть включены  $\psi_1$  и  $\psi_2$  вместо прежнего  $\delta = |\psi_1 - \psi_2|$ , причем здесь за начало отсчета  $\psi$  удобнее принять положение радиус-вектора  $\mathbf{i}$ .

Составление уравнения устойчивости стержня не вызывает осложнений. После того, как из него найдено  $\mathbf{v}_{кр}$ ,  $\mathbf{N}_{кр}$  и  $\mu = (\mathbf{N}_э / \mathbf{N}_{кр})^{0.5}$ , расчетное значение гибкости отыскивается, как

$$\lambda = \mu \lambda_э = \mu (\mathbf{L} / \mathbf{i}).$$

В целом, по предварительными оценкам все необходимые изменения и корректировки можно реализовать в пределах возможностей Автокад.

*2.Б. Построить алгоритмы и соответствующие подпрограммы «К» и «μ» для каркасов с несмещаемыми узлами, включающих сжато-изогнутые стержни с  $i(\psi) \neq const$ .*

В принципе, разработанные приемы определения «μ» можно применить и в нормативных расчетах сжато-изогнутых стержней, т.к. и здесь используется понятие «приведенная гибкость». Пока трудно оценить характер и объем всех доработок и корректировок, которые для этого потребуются. По-видимому, значимость неплоской формы продольного изгиба для таких систем, сравнительно, невелика.

### **Заключение:**

1. Учет реальных условий взаимодействия сжатого стержня со смежными элементами каркаса остается актуальной задачей. В общем случае должна использоваться неплоская схема продольного изгиба.

2. При определении несущей способности сжатого стержня по п. 8.1.3 СП все условия его взаимодействия со смежными элементами в упругой модели каркаса выражаются единственной количественной характеристикой  $\mu$ . В плоскостной схеме продольного изгиба геометрическая ее интерпретация  $\mu = l/L$  и статическая  $\mu = (\mathbf{N}_э / \mathbf{N}_{кр})^{0.5}$  неразрывно связаны. Для относительно простого случая неплоского продольного изгиба стержня с сечением типа  $i(\psi) = const$  эта связь также вполне очевидна.

В более общем случае, когда  $i(\psi) \neq \text{const}$ , возможность чисто геометрической интерпретация пока не ясна. Здесь использование значения  $\mu = (N_{\text{э}}/N_{\text{кр}})^{0,5}$ , по-видимому, заслуживает (или требует?) какого-то обоснования, как более универсального.

3. Актуальнейшей задачей является включение полученных и разрабатываемых решений в используемые ПК. В связи с этим область применения этих решений должна быть по возможности расширена, чтобы повысить экономическую целесообразность связанных с этим работ. Намеченный выше перечень актуальных задач нельзя считать ни исчерпывающим по объему, ни обязательным по очередности.

### Литература.

1. Перельмутер А.В., Сливкер В.И.

Устойчивость равновесия конструкций и родственные проблемы. Том 1.  
Издательство СКАД СОФТ. Москва 2007.

2. Бритвин Е.И., Тарнопольский А.А.

К вопросу о проверке устойчивости стержневых конструкций  
© 2003 Selen BOS Ltd. <http://www.selenasys.com>

### УЧЕТ ИЗГИБНОЙ ЖЕСТКОСТИ СОПРЯЖЕНИЯ СТЕРЖНЕВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С УЗЛОВЫМИ В СТРУКТУРНОМ КАРКАСЕ

1. Известны несколько систем сопряжения элементов («Меро», «Зублин», «NS», «КТ» и т.д.), которые имеют изгибную жесткость различного уровня. Так, например, японские системы сопряжения «NS» и «КТ» имеют повышенную жесткость, хотя их авторы не ставили перед собой подобных целей и не учитывают этот фактор в расчетах. Целенаправленные разработки сопряжений, обладающих высокой изгибной жесткостью, начатые по моей инициативе в ЦНИИЛМК и ЦНИИСК в середине 80-х, привели к созданию нескольких решений стыка, упомянутых выше.

Сейчас, когда появился аппарат, позволяющий учесть то влияние, которое оказывают на работу сжатого стержня сопряженные с ним элементы каркаса, возникла необходимость количественного учета жесткости сопряжений в расчете.

Постановка и подход к решению этой задачи, которые изложены выше страдают недостаточной корректностью. Далее излагается способ решения задачи в более строгой постановке. Предлагаемая здесь модель сопряжения элементов каркаса состоит в том, что каждый стержень соединяется с другими стержнями в центре узла через собственный точечный промежуточный элемент конечной изгибной жесткости  $\rho$  и податливости  $1/\rho$ .

Жесткость  $\rho$  может быть определена только, как некая эквивалентная величина, оказывающая на изгиб стержня такое же влияние, как и фактическая конструкция сопряжения стержневого элемента с узловым.

2. Если использовать обозначения, принятые в статье [Статья](#), то на каждом из концов  $i$ -того стержня ( $1i$  или  $2i$ ) в  $k$ -ом положении ( $\psi_k$ ) вектора  $\tau$  значение момента,

необходимого для поворота на 1 радиан торцевого сечения  $j$  - стержня через точечный элемент

$$m_{jk} = r_j \times c(v_{\pm j}) \times \sin^2 \varphi_{jk} \times \rho_j / (\rho_j + r_j \times |c(v_{\pm j})|), \text{ где:} \quad (1)$$

$\rho_j$  - изгибная жесткость переходного точечного элемента  $j$  - стержня;

- индекс  $\pm j$  в множителе  $c(v_{\pm j})$  означает необходимость учета знака усилия  $\pm N_j$ ;
- введение модуля  $|c(v_{\pm j})|$  в (1) объясняется тем, что для сжатого стержня при  $|N| > |N_{\text{с}}|$  значение  $c(v_{\pm j})$  становится отрицательным и одновременно меняется знак  $\rho_j$ ; оба эти фактора учитываются введением  $|c(v_{\pm j})|$ , что позволяет использовать (1) и при  $|N| < |N_{\text{с}}|$  и при  $|N| > |N_{\text{с}}|$ .

В каждом из задаваемых  $\psi_k$  - положений вектора  $\tau$  вычисляются:

- суммарное сопротивление повороту по  $\tau$  всех  $j$  - стержней, соединенных с данным узлом (1i или 2i) с учетом жесткости  $\rho_j$   $R_{jk} = \sum_j m_{jk}$  (2)

- и коэффициент заземления  $i$  - стержня в данном узле (1i или 2i) с учетом его  $\rho_i$

$$K_{ik} = R_{jk} \times \rho_i / ((R_{jk} + \rho_i) \times r_i) \quad (3)$$

Минимизируя  $K_{ik}$  по  $\psi$  в узлах 1i и 2i, получим значения углов поворота  $\psi_1$  и  $\psi_2$  вектора  $\tau$ , при которых на каждом из концов  $i$  - того стержня (1i или 2i), коэффициенты заземления  $K_i$  приобретают свои минимальные (главные) значения  $k_1$  и  $k_2$

Максимальные (главные) значения  $K_i$  вычисляются при  $\psi_1 = \psi_1 + \pi/2$ ,  $\psi_2 = \psi_2 + \pi/2$  и

выражаются через минимальные значения:  $K_1 = n_1 \times k_1$ ;  $K_2 = n_2 \times k_2$ . (4)

Далее, вычисляется модуль угла  $\delta i = |\psi_1 - \psi_2|$ . при условии  $|\delta| < \pi/2$ . (5)

С учетом вновь полученных выражений (1 – 3) отредактированы ранее написанные подпрограммы для вычисления  $\mu$  для каждого сжатого стержня каркаса (статья [Статья](#)). Далее, они дополнены подпрограммой вычисления ( по СП 16.13330) несущей способности и коэффициента её использования для каждого сжатого стержня. Все эти результаты использованы в Программе N\_2015 «Расчет и оптимизация трубчатых структурных каркасов», которая подготовлена к государственной сертификации.

3. В настоящее время существуют средства, позволяющие рассчитать любые параметры соединения элементов каркаса, в т.ч.  $\rho$ , но точность такого расчета может быть определена только экспериментальным путем. Поэтому, в данном случае, когда непосредственное измерение изгибной жесткости сопряжений не требует больших затрат, целесообразно начать с эксперимента.

Испытательная установка, позволяющая экспериментально определить эквивалентную жесткость  $\rho$  для сопряжения любого известного типа, схематически изображена на фиг.1. В частности, на фиг.1 изображен образец типа «МЕРО» или «КИСЛОВОДСК», который включает:

- узловой элемент 1;
  - исследуемый отрезок 2 стержневого элемента;
  - установочный отрезок 3 стержневого элемента;
  - стыковые устройства в виде болта и приводной муфты 4.
- Испытательная установка включает следующие элементы.

3.1. Жесткая станина образована из двух брусьев 5 и 6, соединенных под прямым углом, и короткой стойки 7 с фланцем для установки узлового элемента.

Станина может быть установлена горизонтально (как показано на фиг.) или вертикально.

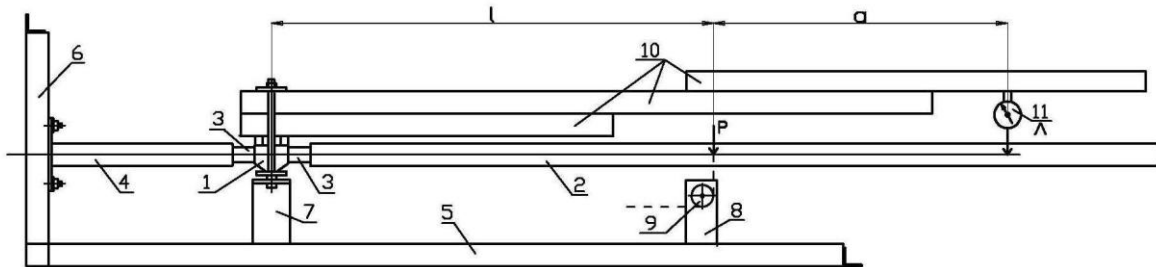
3.2. Система приложения к образцу поперечной нагрузки  $P$  может быть выполнена в двух вариантах:

- при горизонтальном расположении станины - в виде груза, подвешиваемого к образцу на расчетном расстоянии  $l$  от центра узлового элемента;

- при вертикальном расположении установки – в виде консоли 8 со шкивом 9 на конце, закрепляемой на брус 5 так, чтобы трос с грузом  $P$ , перекинутый через шкив, пересекал ось испытуемого элемента на расчетном расстоянии  $l$  от центра узлового элемента.

3.3. Система измерения перемещений образца под нагрузкой включает базовый брус 10, который жестко соединен с узловым элементом 1 и снабжен подвижной опорой для индикатора перемещений 11. Индикатор, измеряющий перемещения образца относительно базового бруса, может быть закреплен в пределах его длины на расстоянии  $l + a$  от центра узлового элемента 1.

Значение  $a$  устанавливается в процессе измерений в зависимости от чувствительности индикатора и диапазона измеряемых перемещений.



Испытательная установка

Практически важен вопрос об определении длины образца, лежащего за пределами длины. В действительности эта длина меньше  $l$ , но не более, чем на 5%. Влияние этого отличия на определяемое  $\rho$  качественно неоднозначно, трудно определимо количественно и, в общем, невелико. Поэтому на данном этапе выбираем вариант, когда длина образца равна  $l + a$ .

4. Методика определения  $\rho$  на описанной установке основана на том, что измеряемое перемещение  $\Lambda$  образца относительно базового бруса представляется в виде суммы

$$\Lambda = \Lambda_p + \Lambda_I, \text{ откуда } \Lambda_p = \Lambda - \Lambda_I, \quad (6)$$

где:

$\Lambda_p$  - перемещение, связанное только с конечной податливостью  $1/\rho$  конструкции стыка;

$\Lambda_I$  - перемещение, связанное только с конечной изгибной податливостью  $1/EI$  отрезка образца  $l$ .

Если учесть, что жесткость  $\rho$  принадлежит точечному промежуточному элементу, который расположен в центре узла, то при приложении к этому элементу момента  $P l$



перемещение  $\Delta_{\rho} = (l + a) \times Pl / \rho$ . (7)

$$\Delta_{I} = (2l + 3a) \times Pl^2 / 6EI. \quad (8)$$

Подставив (7) в (8) в (6), находим:

$$\rho = (l + a) \times Pl / [\Delta - (2l + 3a) \times Pl^2 / 6EI], \quad (9)$$

где  $I$  - момент инерции сечения образца 2;

$E$  - модуль упругости материала образца 2.

Предложенный способ экспериментального определения  $\rho$  был использован при проектировании усиления каркаса покрытия над ТРЦ в г. Ростове-на-Дону (подраздел книги 1.8).

*Апробирование данного способа на одном объекте недостаточно. Формулу (9) можно рекомендовать к широкому применению только после анализа, который должен включать выявление рациональных диапазонов её свободных параметров ( $P$ ,  $l$ ,  $a$ ) и их оптимальных значений.*